Jeux et problèmes (page 72)

1. Passez le 6 ou le 7 devant **

a) Le nombre cherché est **153 846**.

$$\begin{array}{rcccccc} & 1 & 5 & 3 & 8 & 4 & 6 \\ \times & & & & & & 4 \\ \hline = & 6 & 1 & 5 & 3 & 8 & 4 \end{array}$$

Il suffit de poser la multiplication par 4 en commençant par 4 × 6 et de la poursuivre de telle sorte que chaque chiffre du résultat se retrouve décalé d'un rang dans le multiplicande. La multiplication s'arrête lorsqu'on obtient un “6” sans retenue dans le produit. Si on poursuit la multiplication, on obtient **d'autres solutions : 153 846 153 846, 153 846 153 846 153 846, ...**

b) Le nombre cherché est 275 862 068 965 517. On l'obtient en utilisant le même procédé que dans la question a), mais c'est un peu plus long.

2. Les tricubes **

Les nombres de trois chiffres égaux à la somme des cubes de leurs chiffres sont **153, 370, 371 et 407**. Pour les trouver “à la main”, on peut construire un tableau qui nous donne déjà deux solutions 370 et 407.

+	1^3	2^3	3^3	4^3	5^3	6^3	7^3	8^3	9^3
1^3	2	9	28	65	126	217	344	513	730
2^3		16	35	72	132	224	351	520	737
3^3			54	91	152	243	**370**	539	756
4^3				128	189	280	**407**	576	793
5^3					250	341	468	637	854
6^3						432	559	638	945
7^3							686	855	*1072*
8^3								*1024*	*1241*
9^3									*1458*

En testant l'ajout de 1, 8, 27, 64, 125, 21, 343, 512 et 729 aux nombres du tableau, on obtient deux autres solutions : 153 et 371.

3. Les critubes **

En dehors de 0 et 1, il y a cinq autres solutions : **8, 17, 18, 26 et 27**.

4. La suite infernale ***

N = 9 999 996 424. Le nombre A doit diviser 2017 + N^2 et 2017 + $(N + 1)^2$. On en déduit qu'il divise leur différence 2N + 1. Posons 2N + 1 = kA, d'où l'on tire N = (kA – 1) / 2.
On a $N^2 + 2017 = [kA\,(kA - 2) + 8069] / 4$.
Le nombre A doit donc être un diviseur de 8069, qui est un nombre premier. Prenons A = 8069.
On a alors N = (8069k – 1) / 2. Il existe une infinité de valeurs de N qui conviennent.
La plus grande valeur permettant de remplir les dix cases de l'énoncé est N = 9 999 996 424. On a alors N + 1 = 9 999 996 425.
On vérifie que 8069 divise bien 99 999 928 480 012 789 793 et 99 999 928 500 012 782 642.

5. La suite de José ***

Les six premiers termes de la suite sont a, b, $(a + b)$ mod 10 (c'est-à-dire le chiffre des unités de $a + b$), $(a + 2b)$ mod 10, $(2a + 3b)$ mod 10 et $(3a + 5b)$ mod 10. Pour que l'on obtienne une suite de quatre chiffres qui se répète indéfiniment, on doit avoir :
$2a + 3b = a$ (mod 10), ou $a + 3b = 0$ (mod 10), et $a + 5b = b$ (mod 10), ou $3a + 4b = 0$ (mod 10).
Ces deux congruences entraînent (par addition) que $5a = 0$ et $5b = 0$ (mod 10), d'où l'on déduit que a et b doivent être pairs.
Si $a = 2$, on a $b = 6$. Si $a = 4$, alors $b = 2$, mais on doit avoir $b > a$. Si $a = 6$, alors $b = 8$. Enfin si $a = 8$, alors $b = 4$, ce qui ne convient pas ($b < a$).
Le problème a donc deux solutions : **a = 2 et b = 6, ou a = 6 et b = 8.**

6. Les carrés bègues **

On a, de façon évidente, les solutions 774 400, 77 440 000 et 7 744 000 000. En existe-t-il d'autres ?
Une première remarque est qu'un carré bègue est obligatoirement un multiple de 11.

En examinant les terminaisons des carrés des nombres entiers, on peut constater que celles-ci présentent une périodicité. On se convainc facilement que, si l'on excepte les nombres se terminant par des zéros, le dernier chiffre répété ne peut être qu'un 4. Un seul nombre de deux chiffres a un carré de la forme *aabb* : 88 dont le carré est 7744.
On peut démontrer que les quatre derniers chiffres d'un carré bègue ne peuvent être que : 2244, 3344, 6644, ou 7744, avec la périodicité suivante :
$(2500k \pm 88)^2$ se termine par 7744,
$(2500k \pm 238)^2$ par 6644,
$(2500k \pm 688)^2$ par 3344,
et $(2500k \pm 838)^2$ par 2244.
Une recherche systématique montre qu'il n'existe aucun carré bègue de six chiffres.
Pour les carrés se terminant par *aabbcc*, le chiffre *a* peut être n'importe lequel des dix chiffres de 0 à 9. Là aussi, il existe une périodicité puisque : $(n \pm 250\,000)^2$ se termine par les mêmes 6 derniers chiffres que *n*.
Une recherche systématique montre qu'il n'existe aucun carré bègue de huit chiffres. Mais il en existe un de 10 chiffres :
$74\,162^2 = 5\,500\,002\,244$.
Le problème de l'existence d'autres carrés bègues ne se terminant pas par des zéros reste un problème ouvert, mais on conjecture qu'il n'en existe pas d'autres.

7. C'est mieux sans ordinateur ***

Si $N = ab = 10a + b$ alors $M = ba = 10b + a$.

$$\begin{aligned}
&M^3 + N^3\\
&= (10a + b)^3 + (10b + a)^3\\
&= 1000a^3 + 300a^2b + 30ab^2 + b^3 + 1000b^3\\
&\quad + 300b^2a + 30ba^2 + a^3\\
&= 1000\,(a^3 + b^3) + 300ab\,(a + b) + 30ab\,(a + b)\\
&\quad + a^3 + b^3\\
&= 1001(a^3 + b^3) + 330ab\,(a + b)\\
&= 11(91(a^3 + b^3) + 30ab\,(a + b)).
\end{aligned}$$

Le carré cherché est donc divisible par 11 et par conséquent par $11^2 = 121$.

$$\begin{aligned}
&M^3 + N^3\\
&= 11\,(91\,(a + b)\,(a^2 + ab + b^2) + 30ab\,(a + b))\\
&= 11\,(a + b)\,(91a^2 + 91b^2 + 121ab).
\end{aligned}$$

Comme 11 divise 121 et ne divise pas 91, il divise $a + b$ ou $a^2 + b^2$.
Si $a + b$ est divisible par 11, les seules possibilités sont $a = 9$ et $b = 2$; $a = 8$ et $b = 3$; $a = 7$ et $b = 4$; $a = 6$ et $b = 5$; (vu la symétrie du problème on peut supposer $a \geq b$).
$92^3 + 29^3 = 803\,077$ n'est pas un carré.
$83^3 + 38^3 = 626\,659$ n'est pas un carré.
$74^3 + 47^3 = 509\,047$ n'est pas un carré.
$65^3 + 56^3 = 450\,241 = 671^2$.
Si $a^2 + b^2$ divisible par 11, les 45 sommes de 2 carrés $a^2 + b^2$ avec $0 \leq b \leq a \leq 9$ sont : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82, 8, 13, 20, 29, 40, 53, 69, 84, 18, 25, 34, 45, 58, 73, 90, 32, 41, 52, 65, 80, 97, 50, 61, 74, 89, 106, 72, 85, 117, 98, 113, 130, 128, 145, 162.
Aucun de ces nombres n'est divisible par 11.
On a donc **deux solutions : N = 56 et N = 65.**

8. L'hôtel UBU ***

Le problème consiste à retrouver une permutation *p* connaissant *p* o *p* (*p* suivi de *p*).
En appliquant *p* à partir de Monsieur Un, on obtient l'orbite : 1 –> 3 –> 15 (–> 1...) et
en appliquant *p* o *p*, toujours à partir de Monsieur Un, on a : 1 –> 15 –> 3 (–> 1 ...).
L'orbite de Monsieur Deux pour *p* :
2 –> 11 –> 7 –> 6 –> 14 ... devient
2 –> 6 –> 11 –> 14 –> 7 ... pour *p* o *p*.
L'orbite de Monsieur Quatre pour *p* (4 –> 10 –> 16 –> 12 ...) se transforme en celle de Monsieur Cinq (5 –> 8 –> 9 –> 13 ...) pour *p* o *p* et réciproquement :
4 –> 5 –> 10 –> 8 –> 16 –> 9 –> 12 –> 13 ...
On peut alors compléter le tableau :

Vous êtes en	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Vous irez en	15	6	1	5	10	11	2	16	12	8	14	13	4	7	3	9

Voir aussi les compléments sur
www.tangente-education.com/TE42